Ejercicio 1A Junio (mod 1) 2023 (Análisis)

Considera la función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$.

(a) (1'5 puntos) Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

(b) (1 punto) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot f(x)\right)$.

Solución

Considera la función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$.

(a)

Estudia y halla los máximos y mínimos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

Sabemos que los extremos absolutos se encontrarán en los extremos del intervalo $(-\infty, +\infty)$ y las soluciones de $f'(x) = 0$; en nuestro caso silo en las soluciones de $f'(x) = 0$. Entramos en $f(x)$ con ellos, el mayor valor será el del máximo absoluto y el menor valor el de mínimo absoluto.

Tenemos: $f(x) = \dfrac{1}{e^x + e^{-x}}$, $f'(x) = \dfrac{0 - 1\cdot(e^x + e^{-x}\cdot(-1))}{(e^x + e^{-x})^2} = \dfrac{e^{-x} - e^x}{(e^x + e^{-x})^2}$

De $f'(0) = 0$ resulta $e^{-x} - e^x = 0 \ \to\ e^{-x} = e^x \to -x = x$, de donde $0 = 2x$ y $x = 0$.

Tenemos $f(0) = \dfrac{1}{e^0 + e^{-0}} = \dfrac{1}{1+1} = 1/2$.

Luego el máximo absoluto y relativo es 1/2 y se alcanza en x = 0. No tiene mínimos absolutos ni relativos aunque la función se acerca a 0 en $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{-x}+e^x} = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{e^x}+e^x} = \frac{1}{\frac{1}{+\infty}+\infty} = \frac{1}{0+\infty} = 0$$

(b)

Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot f(x)\right)$

La regla de L'Hôpital (L'H) dice: Si "f" y "g" son funciones continuas en $[a-\delta, a+\delta]$, derivables en $(a-\delta, a+\delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$, entonces si existe $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$. La regla se puede reiterar, y también es válida si tenemos ∞/∞, y si $x\to\infty$.

Tenemos $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot f(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot\left(\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}\right)\right) = +\infty\cdot 0$ (Indeterminación).

Sabemos que si $f\cdot g$ tiende a $+\infty\cdot 0$, haciendo el cambio $f\cdot g = \dfrac{g}{1/f}$ vemos que tiende a 0/0 o a ∞/∞ y le podemos aplicar L'H.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot\left(\frac{1}{e^x+e^{-x}}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1/x^2}\cdot\left(\frac{1}{e^x+e^{-x}}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1/x^2}\cdot\left(\frac{1}{e^x+e^{-x}}\right)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^x}{x^2}+\frac{e^{-x}}{x^2}}\right) **$$

**Calculamos por separado los límites del denominador

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2} = \left\{\frac{+\infty}{+\infty}; \text{L'H}\right\} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x} = \left\{\frac{+\infty}{+\infty}; \text{L'H}\right\} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x\cdot x^2} = \frac{1}{+\infty\cdot+\infty} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

Luego $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2\cdot f(x)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\frac{e^x}{x^2}+\frac{e^{-x}}{x^2}}\right) = \dfrac{1}{+\infty+0} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$, **es decir el límite pedido es 0.**

Ejercicio 2A Junio (mod 1) 2023 (Análisis)

Sea la función f : [-2, 2] → R, definida por $f(x) = x^3 - 2x + 5$.

(a) (1'5 puntos) Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos (-2, f(-2)) y (2, f(2)).

(b) (1 punto) Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en su punto de inflexión.

Solución

Sea la función f : [-2, 2] → R, definida por $f(x) = x^3 - 2x + 5$.

(a)

Determina las abscisas de los puntos, si existen, en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos (-2, f(-2)) y (2, f(2)).

Sabemos que la pendiente genérica de la recta tangente de la función f es $\mathbf{f'(x) = 3x^2 - 2}$.

Tenemos (-2, f(-2)) = (-2, 1) y (2, f(2)) = (2, 9). La recta que pasa por (-2, 1) y (2, 9) es de la forma.

y = mx + n, siendo "m" la pendiente de la recta $\rightarrow \begin{cases} 1 = -2m + n \\ 9 = 2m + n \ (E_2 - E_1) \end{cases} \approx \begin{cases} 1 = -2m + n \\ 8 = 4m \end{cases}$, de donde 4m = 8 y

m = 2.

Igualando pendientes tenemos "$2 = 3x^2 - 2$", donde $3x^2 = 4 \rightarrow x^2 = 4/3$, **luego las abscisas en los que la pendiente de la recta tangente coincide con la pendiente de la recta que pasa por los puntos (-2, f(-2)) y (2, f(2)) son $x = \pm\sqrt{(4/3)}$.**

(b)

Determina la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en su punto de inflexión.

Sabemos que las abscisas "b" de los puntos de inflexión verifican $f''(b) = 0$ y $f'''(b) \neq 0$

Tenemos $f(x) = x^3 - 2x + 5$; $f'(x) = 3x^2 - 2$; $f''(x) = 6x$ y $f'''(x) = 6 \neq 0$

De $f''(x) = 0 \rightarrow 6x = 0$, **luego x = 0 es el punto de inflexión.**

Recta tangente en x = 0 es: $y - f(0) = f'(0)\cdot(x - 0)$. Recta normal en x = 0 es: $y - f(0) = (-1/f'(0))\cdot(x - 0)$

$f(x) = x^3 - 2x + 5$; luego $f(0) = 5$. $f'(x) = 3x^2 - 2$, luego $f'(0) = -2$.

La recta tangente pedida es $y - 5 = -2\cdot(x - 0)$, luego **la recta tangente pedida es $y = -2x + 5$**.

La recta normal pedida es $y - 5 = (-1/-2)\cdot(x - 0)$, luego **la recta normal pedida es $y = x/2 + 5$**.

Ejercicio 3A Junio (mod 1) 2023 (Análisis)

Considera la función f : R → R, definida por $f(x) = x\cdot|x - 1|$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de dicha función y su recta tangente en el punto de abscisa x = 0.

Solución

Tenemos $|x - 1| = \begin{cases} -(x - 1) & \text{si} \quad x - 1 < 0 \\ +(x - 1) & \text{si} \quad x - 1 \geq 0 \end{cases} = \begin{cases} -x + 1 & \text{si} \quad x < 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$, luego $f(x) = x\cdot|x - 1| = \begin{cases} -x^2 + x & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 - x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$.

El punto x = 0 está en la rama x < 1, donde $f(x) = -x^2 + x$ (f(0) = 0) y $f'(x) = -2x + 1$ ($f'(0) = 1$)

Recta tangente en x = 0 es: $y - f(0) = f'(0)\cdot(x - 0) \rightarrow y - 0 = 1(x - 0)$, es decir **la recta tangente es y = x, bisectriz del I y III cuadrante**.

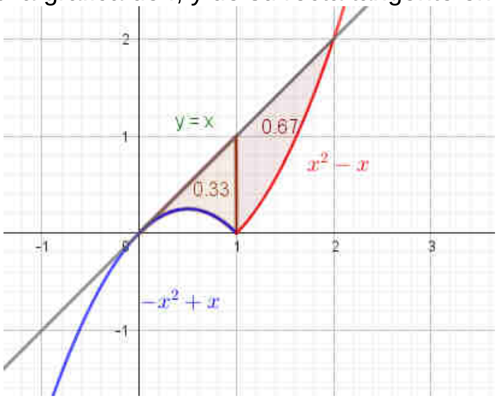
Veamos la gráfica de f(x)

Si x < 1, $f(x) = -x^2 + x$ y su gráfica es un trozo de parábola así (∩) porque el nº que multiplica a x^2 es negativo, con la abscisa de su vértice es la solución de $f'(x) = 0 = -2x + 1$, de donde x = 1/2 y su vértice es el punto V(1/2, f(1)) = V(1/2, 1/4) = V(0'5, 0'25). Otro punto es $(1^-, 0)$

Si $x \geq 1$, $f(x) = x^2 - x$, cuya gráfica es la de un trozo de parábola con las ramas hacia arriba $\cup$ (el nº que multiplica a x^2 es positivo), con abscisa del vértice en el número que anula la 1ª derivada, es decir $f'(x) = 2x - 1 = 0$, de donde $x = 1/2$ y el vértice es $V'(1/2, f(1/2)) = V'(1/2,-1/4) = V'(1/2,-0'25)$. Otro punto es $(1, 0)$.

Veamos el corte de $y = x$ con la rama de f en $x \geq 1$.
De $x = x^2 - x \rightarrow x^2 - 2x = 0 = x\cdot(x - 2)$ de donde $x = 2$ ($x = 0$ no está en $x \geq 1$)

Con todo lo anterior un esbozo de la gráfica de f, y de su recta tangente en $x = 0$ es:



El área pedida es suma se dos áreas, pues f tiene dos ramas:

Área $= + \int_0^1 (x - (-x^2 + x))dx + \int_1^2 (x - (x^2 - x))dx = \int_0^1 (x^2)dx + \int_1^2 (2x - x^2)dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$

$= [\, 1/3 - 0 + (4 - 8/3) - (1 - 1/3) \,]\ u^2$ **$= 1\ u^2$.**

Ejercicio 4A Junio (mod 1) 2023 (Análisis)

Considera la función $F : R \rightarrow R$ definida por $F(x) = \int_0^x sen(t^2)dt$. Calcula $\lim_{x\rightarrow 0} \frac{x\cdot F(x)}{sen(x^2)}$.

Solución

- Recordamos que una de las propiedades de la integral definida era $\int_a^a f(x)dx = 0$.
- El Teorema Fundamental del Calculo Integral (TFCI) dice: Si f(x) es continua en [a, b] entonces la función $G(x) = \int_a^x [\, f(t)\,]dt$ es derivable y su derivada es $G'(x) = \left(\int_a^x [f(t)]dt\right)' = f(x)$.
- La regla de L'Hôpital (L'H) dice: Si "f" y "g" son funciones continuas en $[a-\delta, a+\delta]$, derivables en $(a-\delta, a+\delta)$, verificando que $f(a) = g(a) = 0$ y $\lim_{x\rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} =$
$= \lim_{x\rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$. (La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si $x\rightarrow\infty$)

Luego $\lim_{x\rightarrow 0} \frac{x\cdot F(x)}{sen(x^2)} = \lim_{x\rightarrow 0} \frac{x\cdot\int_0^x sen(t^2)dt}{sen(x^2)} = \left\{ \frac{0\cdot\int_0^0 sen(t^2)dt}{sen(0)} = \frac{0\cdot 0}{0} = \frac{0}{0}; L'H \right\} =$

$$= \lim_{x\rightarrow 0} \frac{x\cdot\int_0^x sen(t^2)dt}{sen(x^2)} = \left\{ \frac{0\cdot\int_0^0 sen(t^2)dt}{sen(0)} = \frac{0\cdot 0}{0} = \frac{0}{0}; L'H \right\} = \lim_{x\rightarrow 0} \frac{1\cdot\int_0^x sen(t^2)dt + x\cdot\left(\int_0^x sen(t^2)dt\right)'}{cos(x^2)\cdot 2x} =$$

$$= \lim_{x\rightarrow 0} \frac{1\cdot\int_0^x sen(t^2)dt + x\cdot sen(x^2)}{cos(x^2)\cdot 2x} = \left\{ \frac{\int_0^0 sen(t^2)dt + 0\cdot sen(0)}{cos(0)\cdot 0} = \frac{0}{0}; L'H \right\} =$$

$$= \lim_{x\rightarrow 0} \frac{sen(x^2)+1\cdot sen(x^2)+x\cdot cos(x^2)\cdot 2x}{-sen(x^2)\cdot 2x\cdot 2x+cos(x^2)\cdot 2} = \frac{0 + 0\cdot 0 + 0\cdot 1\cdot 0}{0\cdot 0 + 1\cdot 2} \mathbf{= 0/2 = 0.}$$

Ejercicio 5B Junio (mod 1) 2023 (Algebra)

Una marca de vehículos ha vendido este mes coches de tres colores: blancos, negros y rojos. El 60% de los coches blancos más el 50% de los coches negros representan el 30% de los coches vendidos. El 20% de los coches blancos junto con el 60% de los coches negros y el 60% de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos. Se han vendido 100 coches negros más que blancos. Determina el número de coches vendido de cada color.

Solución

Sea:
x = número de coches blancos,
y = número de coches negros,
z = número de coches rojos.

De, "el 60% de los coches blancos más el 50% de los coches negros representan el 30% de los coches vendidos" $\rightarrow 0'6x + 0'5y = 0'3(x + y + z)$.
De, "El 20% de los coches blancos junto con el 60% de los coches negros y el 60% de los coches rojos representan la mitad de los coches vendidos" $\rightarrow 0'2x + 0'6y + 0'6z = 0'5(x + y + z)$.
De, "Se han vendido 100 coches negros más que blancos" $\rightarrow y = x + 100$.

Vamos a intentar resolverlo por el método de Gauss. También se puede resolver por Cramer.

$$\begin{cases} 0'3x + 0'2y - 0'3z = 0 \\ -0'3x + 0'1y + 0'1z = 0 \\ y = x + 100 \end{cases} \approx \begin{cases} 3x + 2y - 3z = 0 \\ -3x + 1y + 1z = 0 \;(E_2+E_1) \\ y = x + 100 \end{cases} \approx \begin{cases} 3x + 2y - 3z = 0 \\ \quad + 3y - 2z = 0 \\ y = x + 100 \end{cases} \approx \begin{cases} 3x + 2x + 200 - 3z = 0 \\ \quad + 3x + 300 - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\approx \begin{cases} 5x - 3z = -200 \text{ por } 2 \\ 3x - 2z = -300 \text{ por } -3 \end{cases} \approx \begin{cases} 10x - 6z = -400 \\ -9x + 6z = 900 \end{cases}$$

Sumando **$x = 500$**, por tanto **$y =$** $(500) + 100$ **$= 600$**, y entrando en $-3x + y + z = 0 \rightarrow -1500 + 600 + z = = 0$ de donde **$z = 900$**.

Luego se han vendido 500 coches de color blanco, 600 de color negro y 900 de color rojo.

Ejercicio 6B Junio (mod 1) 2023 (Algebra)

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) (0'5 puntos) Determina para qué valores de m existe la inversa de la matriz A.
b) (2 puntos) Para todo $m \neq -1$, resuelve, si es posible, la ecuación matricial $A\cdot X + X = B$.

Solución

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a)
Determina para qué valores de m existe la inversa de la matriz A.

La matriz A tiene inversa si $\det(A) = |A| \neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = m\cdot\begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{vmatrix} = m\cdot m^2 = m^3 \neq 0 \text{ si } m \neq 0$$

Si $m \neq 0$, $|A| \neq 0$ y la matriz A tiene inversa $A^{-1}=\dfrac{Adj(A)^t}{|A|}$.

(b)
Para todo $m \neq -1$, resuelve, si es posible, la ecuación matricial $A\cdot X + X = B$.

De $A\cdot X + X = B \rightarrow A\cdot X + I\cdot X = B \rightarrow (A + I)\cdot X = B \rightarrow$ **$C\cdot X = B$** con $C = A + I$.

$C = A + I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{pmatrix}$. Calculamos su matriz inversa $C^{-1} = \dfrac{Adj(C)^t}{|C|}$ **.**

$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila $= 1\cdot(1 - 0) - 0 + m\cdot(m^2 - 0) = 1 + m^3$ *que sólo es 0 para m = -1.*

$C^t = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ 0 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $Adj(C^t) = \begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix}$, $C^{-1} = \dfrac{Adj(C)^t}{|C|} = \dfrac{1}{1+m^3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix}$.

Multiplicando la expresión $C\cdot X = B$, por la izquierda, por la matriz $C^{-1} \rightarrow C^{-1}\cdot C\cdot X = C^{-1}\cdot B \rightarrow I\cdot X = C^{-1}\cdot B \rightarrow$
$\rightarrow$ **$X = C^{-1}\cdot B$.**

Por tanto **$X = C^{-1}\cdot B$ =** $\dfrac{1}{1+m^3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & m^2 & -m \\ -m & 1 & m^2 \\ m^2 & -m & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{1+m^3}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -m & m^2 \\ -m & m^2 & 1 \\ m^2 & 1 & -m \end{pmatrix}$.

Ejercicio 7 Junio (mod 1) 2023 (Geometría)

El plano perpendicular al segmento de extremos P(0, 3, 8) y Q(2, 1, 6) que pasa por su punto medio corta a los ejes coordenados en los puntos A, B y C. Halla el área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C.

Solución

El plano π perpendicular al segmento de extremos PQ que pasa por su punto medio, es el plano mediador del segmento PQ, y tiene por vector normal el **PQ**.

Punto medio de PQ es M((0 + 2)/2, (3 + 1)/2, (8 + 6)/2) = M(1, 2, 7). Vector **PQ** = (2, -2, -2).

La ecuación del plano es $\pi \equiv$ **MX•PQ** = 0, donde • es el producto escalar.

La ecuación del plano es $\pi \equiv$ **MX•PQ** = 0 = (x - 1, y - 2, z - 7) •(2, -2, -2) = **2x - 2y - 2z + 16 = 0.** Simplificando tenemos $\pi \equiv$ **x - y - z + 8 = 0.**

Veamos los puntos de corte del plano $\pi \equiv x - y - z + 8 = 0$ con los ejes.
Corte con OX, π = 0, y = z = 0, punto A(-8,0,0)
Corte con OY, π = 0, x = z = 0, punto B(0,8,0)
Corte con OZ, π = 0, x = y = 0, punto C(0,0,8)

Sabemos que el área de un triángulo es 1/2 del área del paralelogramo que determinan sus vectores **AB** = = (8, 8, 0) y **AC** = (8, 0, 8), es decir 1/2 módulo (|| ||) del producto vectorial (x) de dichos vectores.

ABx**AC** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & 8 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera fila = **i**(64-0) - **j**(64-0) + **k**(0-64) = (64, -64, -65).

Área triángulo = (1/2)·**||AB**x**AC|| = (1/2)·$\sqrt{}$(64^2 + 64^2 + 64^2) = 32·$\sqrt{}$(3) u^2** $\cong$ **55'4256258 u^2**.

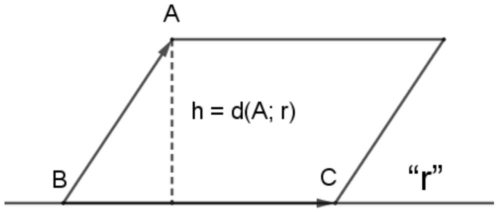
Ejercicio 8 Junio (mod 1) 2023 (Geometría)

Considera el punto A(-1, 1, 3) la recta r determinada por los puntos B(2, 1, 1) y C(0, 1, -1).
a) (1'5 puntos) Halla la distancia del punto A a la recta r.
b) (1 punto) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B y C.

Solución

Considera el punto A(-1, 1, 3) la recta r determinada por los puntos B(2, 1, 1) y C(0, 1, -1).
(a)
Halla la distancia del punto A a la recta r.

Calculamos la distancia como la altura del paralelogramo formado por los vectores **BC** = (-2, 0, -2) {es el vector director de la recta r} y el vector **BA** = (-3, 0, 2)



d(P;r) = h

Área paralelogramo = **||BC**x**BA||** = base por altura = **||BC||**·h, de donde h = (||**BC**x**BA**||)/(||**BC**||), donde “x” es el producto vectorial de dos vectores y **|| ||** es el módulo del vector correspondiente, por tanto:

d(A; r) = h = (||**BC**x**BA**||)/(||**BC**||)

$$\mathbf{BC}\text{x}\mathbf{BA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = \mathbf{i}(0-0) \mathbf{-} \mathbf{j}(-4-6) + \mathbf{k}(0-0) = (0, 10, 0).$$

Área paralelogramo = **||BC**x**BA||** = $\sqrt{(0^2 + 10^2 + 0^2)}$ u^2 = 10 u^2.

La base del paralelogramo es **||BC||** = $\sqrt{(2^2 + 0^2 + 2^2)}$ u^1 = $\sqrt{(8)}$ u^1.

Luego la distancia pedida es:
d(A; r) = h = (||**BC**x**BA**||)/(||**BC**||) = (10 u^2)/($\sqrt{(8)}$ u^1) **= ($10/\sqrt{(8)}$) u^1 = ($5\sqrt{(2)}/2$) u^1** ≅ **3’535534 u^1.**
(b)
Sabemos que el área de un triángulo es 1/2 del área del paralelogramo que determinan sus vectores **AB** = = (-3, 0, 2) y **AC** = (1, 0, -4), es decir 1/2 módulo (|| ||) del producto vectorial (x) de dichos vectores.

$$\mathbf{AB}\text{x}\mathbf{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = \mathbf{i}(0-0) \mathbf{-} \mathbf{j}(12-2) + \mathbf{k}(0-0) = (0, 10, 0).$$

Área triángulo = (1/2)·||**AB**x**AC**|| **= (1/2)·$\sqrt{(0^2 + 10^2 + 10^2)}$ u^2 = (1/2)·10 u^2 = 5 u^2**.